

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**POINCARÉ GRUP VE CEBİRLERİ**

**ÖZGE HİDİRLAR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
YARD. DOÇ. DR. YASEMEN UÇAN**

**İSTANBUL, 2014**

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**POINCARÉ GRUP VE CEBİRLERİ**

Özge HİDİRLAR tarafından hazırlanan tez çalışması 10.07.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Yard. Doç. Dr. Yasemen UÇAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Yard. Doç. Dr. Yasemen UÇAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Doç. Dr. Fügen TORUNBALCI AYDIN

Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Yard. Doç. Dr. Ayten PEKİN

İstanbul Üniversitesi

\_\_\_\_\_

## ÖNSÖZ

---

Tez dönemimde tanışma ve çalışma fırsatı bulduğum, o andan itibaren de desteğini her anlamda esirgemeyen, beni ve çalışmalarımı yönlendiren ve şekillendiren Sayın ve çok Sevgili Hocam Yasemen UÇAN'a çok teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi hiçbir yardımı esirgemeyen, babam Cevat HIDIRLAR'a, annem Gülşen HIDIRLAR'a ve ablam İlknur HIDIRLAR'a, aynı zamanda sevgisi ve ilgisiyle bu çok zorlu süreçte başından beri daima yanımda olan ve tüm zorlukları aşmamı sağlayan Olgu TATLIPINAR'a çok teşekkür ederim.

Temmuz, 2014

Özge HIDIRLAR

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

|                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------|------|
| SİMGE LİSTESİ .....                                                       | vii  |
| ÖZET .....                                                                | viii |
| ABSTRACT .....                                                            | ix   |
| BÖLÜM 1                                                                   |      |
| GİRİŞ .....                                                               | 1    |
| 1.1    Literatür Özeti .....                                              | 1    |
| 1.2    Tezin Amacı .....                                                  | 2    |
| 1.3    Hipotez .....                                                      | 2    |
| BÖLÜM 2                                                                   |      |
| POINCARÉ GRUP VE CEBİRLERİ .....                                          | 3    |
| 2.1    Poincaré Grup ve Cebiri .....                                      | 3    |
| 2.2    İki Boyutlu Poincaré Grup ve Cebiri $ISO(1,1)$ ve $iso(1,1)$ ..... | 5    |
| 2.3    Üç Boyutlu Poincaré Grup ve Cebiri $ISO(1,2)$ ve $iso(1,2)$ .....  | 7    |
| 2.4    Dört Boyutlu Poincaré Grup ve Cebiri $ISO(1,3)$ , $iso(1,3)$ ..... | 9    |
| BÖLÜM 3                                                                   |      |
| SÜPERCEBİRLER.....                                                        | 12   |
| 3.1    Süpercebirlere.....                                                | 12   |
| 3.2    Kesirsel (Fractional) Süpercebirlere.....                          | 14   |
| 3.3    Kesirsel (Fractional) Süper Jakobi Özdeşlikleri .....              | 15   |
| 3.4 $U_3^2(iso(1,1))$ Cebiri .....                                        | 21   |
| BÖLÜM 4                                                                   |      |
| SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                                   | 23   |
| KAYNAKLAR.....                                                            | 24   |

EK-A

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| A-1 Lie Grubu .....           | 25 |
| A-2 Lie Cebiri .....          | 26 |
| A-3 Evrensel Zarf Cebiri..... | 26 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                | 31 |

## SİMGE LİSTESİ

---

|                           |                                     |
|---------------------------|-------------------------------------|
| $G$                       | Lie Grubu                           |
| $g$                       | Lie Cebiri                          |
| $U(g)$                    | Evrensel Zarf Cebiri                |
| $U_3^N(g)$                | Kesirsel (Fractional) Süpercebiri   |
| $R_{p,q}^n$               | $n$ Boyutlu Pseudo Öklid Uzayı      |
| $c_{ij}^k$                | $g$ Lie Cebirinin Yapı Sabitleri    |
| $b_{\alpha\beta\gamma}^j$ | Kesirsel Süpercebiri Yapı Sabitleri |
| $g_{\kappa\kappa}$        | Metrik Tensör                       |

## POINCARÉ GRUP VE CEBİRLERİ

Özge HİDİRLAR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yard.Doç.Dr. Yasemen UÇAN

Bu çalışmada öncelikle Poincaré grup ve cebirlerinin fizikteki önemi belirtilmiş, daha sonra ise sırasıyla  $ISO(1,1)$  ,  $ISO(1,2)$  ve  $ISO(1,3)$  grup ve cebirleri tanıtılarak, Poincaré cebirlerinin aşikâr olmayan bir genişlemesinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda süper ve kesirsel süpersimetrik cebir ile ilgili bilgiler özetlenip [3] makalesindeki cebirsel yaklaşım kullanılarak  $iso(1,1)$  cebirinin aşikâr olmayan bir genişlemesinin  $n=3$   $N=2$  için oluşturulmuş ve aynı zamanda bu cebir  $U_3^2(iso(1,1))$  ile gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirsel (fractional), süpersimetrik, Lie cebiri

## POINCARÉ GROUPS AND ALGEBRAS

Özge HİDİRLAR

Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Yard. Doç. Dr. Yasemen UÇAN

In this study, we emphasized the importance of Poincaré groups and algebras in Physics, then respectively, introduce  $ISO(1,1)$ ,  $ISO(1,2)$  and  $ISO(1,3)$  groups and algebras and we aimed to obtain a nontrivial expansion of Poincaré algebra. In this context, we aim is to obtain super and fractional supersymmetric algebra. We created a nontrivial expansion of  $iso(1,1)$  for  $n=3$  and  $N=2$  by using algebraic approach in [3] and we denoted this algebra by using  $U_3^2(iso(1,1))$ .

**Keywords:** Fractional, supersymmetric, Lie algebra.

#### 1.1 Literatür Özeti

Fiziksel sistemlerin özelliklerinin anlaşılmasında, cebirsel yapılarla birleştirilen simetri kavramı önem kazanmıştır. Onların sınıflandırılmasında olduğu kadar, mümkün matematiksel yapılarının belirlenmesi fizik kurallarının daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Örneğin, elementer parçacıklar ve onlar arasındaki etkileşmelerin özellikleri Lie cebirleri sayesinde çok iyi anlaşılmıştır. Bundan başka, süpersimetrisinin keşfi matematik ve teorik fizikte merkez durumuna gelen süper Lie cebirleri kavramının doğmasına sebep olmuştur. Bu alanda yapılan çalışmaların sonucunda süpersimetrisinin de üzerinde giden simetrilere rastlanılmış ve bu simetriler Kesirsel (Fractional) süpersimetri ile adlandırılmış ve cebirsel yapı altında kesirsel Lie cebirleri olarak isimlendirilmişlerdir.

Yaşadığımız Minkowski uzayının (uzay zamanın) geometrisi, Poincaré grubu ile tanımlanır. Bu grup, Lorentz grubunun vektör temsili ile genişletilmiş grubudur. Uzay zamanda Poincaré simetrisi; ötelemeler (yer değiştirmeler), uzaydaki dönmeler ve itmeden oluşmaktadır. Son iki simetri birlikte Lorentz grubunu oluştururlar. Lie grubunun bu üreteçleri Poincaré üreteçleri olarak adlandırılır. Uzay zamanda bu simetri çeşitlerini çalışmak ilginç olmuştur. Kesirsel süpersimetride Poincaré grup ve cebirlerinin aşikâr olmayan genişlemelerini elde etmek için kesirsel (Fractional) süpersimetrik genellemeleri farklı yollarla incelenip yapılmıştır [7],[8]. Kesirsel süpercebirler ilk olarak [1],[2] de tanıtılan  $S_n$  invariant formları üzerine kuruldu. Daha sonra bu oluşum Hopf cebri şartlarında verildi [3]. Bunu yapmak için birçok sebep vardı. Süpercebirlerin formülasyonunda geometrik [10] veya cebirsel [11] yaklaşımlar mevcuttur. Kesirsel (Fractional) süpercebirler için geometrik yaklaşımların yetersiz olduğu görülmüş bu sebepten [3] makalesindeki cebirsel yaklaşım kullanılarak kesirsel süpersimetriden dualite ile Kesirsel süper grupları oluşturmak mümkün olmuştur.

Süpersimetrik teoride, Poincaré cebirinin genişlemeleri ötelemelerin karekökünden elde edilmişti [6] ve [7] nolu makalelerde daha yüksek mertebeden köklerden yeni cebirler elde edilmiş ve bu makaleden elde edilen sonuçlar özetlenerek, kesirsel (Fractional) süpersimetrisinin dört boyuttaki oluşumu ve Poincaré cebirinin cebirsel genişlemesi üzerine bazı sonuçlar [7] makalesinde verilmiştir. [8] makalesinde 3.

mertebeden Lie cebirlerinin sınıflamasında dört boyutta  $iso(1,3)$  Poincaré cebiri göz önüne alınmış ve uzay zaman ötelemeleri değişmeli üreteçler olduğundan Poincaré cebirinin mümkün birçok genişlemesi, süpercebirlerin büzülme (contraction) teorisinden görülebilmektedir [7].

## 1.2 Tezin Amacı

Poincaré grup ve cebirleri ile ilgili literatür araştırmaları yaparak, kesirsel süpersimetrik genellemeleri incelemek ve [3] makalesindeki yaklaşımı kullanılmak suretiyle  $S_3$  invariant (değişmez) formu üzerine kurulan iki boyutlu kesirsel süpersimetrik Poincaré cebirini Hopf cebiri formülasyonunda oluşturmayı amaçladık.

## 1.3 Hipotez

Tez çalışmasının içeriği aşağıdaki gibidir:

2.Bölümde; iki, üç ve dört boyutta Poincaré grup ve cebirleri tanıtıldı.

3.Bölümde; [3] makalesindeki süper ve kesirsel (Fractional) süpersimetrik cebirler ile ilgili tanım ve sonuçları özetleyip, iki boyutlu kesirsel (Fractional) süpersimetrik Poincaré cebirini  $n=3$  ve  $N=2$  için elde edildi ve bu cebir  $U_3^2(iso(1,1))$  sembolü ile gösterildi.

## BÖLÜM 2

### POINCARÉ GRUP VE CEBİRLERİ

#### 2.1 Poincare Grup ve Cebiri

Poincare grubu  $ISO(1, d)$  ,  $d+1$  boyutlu Minkowski uzay zamanın izometri grubudur. Klasik durumda  $ISO(1,3)$  dir.  $R^4$  'te Minkowski metriğini koruyan dönüşümlerin grubudur.

4 boyutlu Minkowski uzayının (uzay zamanın) metrik matrisi

$$g_{\kappa\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

ve uzaydaki koordinatlar  $x = (x^\kappa)$  ,  $(\kappa = 0,1,2,3)$  olmak üzere bu uzayda iki teğet vektör arasında skaler çarpım

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\kappa\nu} g_{\kappa\nu} \xi^\kappa \eta^\nu = \xi^\kappa \eta_\kappa$$

ile tanımlanır.

Poincare dönüşümleri

$$x^\kappa \rightarrow x'^\kappa = a^\kappa_\nu x^\nu + b^\kappa$$

lineer dönüşümünde ortaya çıkan  $(A, B)$  elemanlarının oluşturduğu

$$iL = \{(A, B) \mid A^T g A = g\}$$

kümesi ile gösterilir. Bu küme üzerindeki işlem

$$(A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1 A_2, A_1 B_2 + B_1)$$

ile tanımlanır ve bu küme üzerindeki bu işlem ile bir grup oluşturur. Bu gruba; Poincaré grubu ve grup işlemine de semi-direkt (yarı-doğru) çarpım denir. Bu grubun;

Birim elemanı;  $(1, 0)$  ,

Ters elemanı;  $(A, B)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}B)$

dir. Poincaré grubu için  $\frac{1}{2}d(d+1)$  bağıntısı ile üreteçlerinin sayısı belirlenir. Kısaca,

Poincaré grubu uzay zaman ötelemeleri ve Lorentz dönüşümlerinin oluşturduğu grupların semi-direkt (yarı-doğru) çarpımıdır.

Poincaré gruplarını boyutlarına göre şöyle sıralayabiliriz;

$ISO(1,1)$  İki boyutlu Poincaré grubu

$ISO(1,2)$  Üç boyutlu Poincaré grubu

$ISO(1,3)$  Dört boyutlu Poincaré grubu

Ve bu gruplar için

$$ISO(1,1) \supset SO(1,1) \supset SO(1)$$

$$ISO(1,2) \supset SO(1,2) \supset SO(3)$$

$$ISO(1,3) \supset SO(1,3) \supset SO(3) \supset SO(2)$$

ilişkisi geçerlidir.

Bu gruplara ait cebirler de ;

$iso(1,1)$  – 2 Boyutlu Poincaré cebiri

$iso(1,2)$  – 3 Boyutlu Poincaré cebiri

$iso(1,3)$  – 4 Boyutlu Poincaré cebiri

şeklindedir.

## 2.2 İki Boyutlu Poincare Grup ve Cebiri: $ISO(1,1)$ ve $iso(1,1)$

$\mathbb{R}^2$  de,  $O(1,1)$  grubu;

$$x_0^2 - x_1^2 = 1$$

kuadratik formunu invariant bırakan dönüşümlerin (Lorentz dönüşümlerinin) matris grubudur. Determinantı bir olan matrislerin grubu da  $SO(1,1)$  ile gösterilir ve  $SO(1,1) \subset O(1,1)$

dir. Bu grubun metrik matrisi

$$g_{\kappa\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dir. İki boyutlu Poincaré grubu  $ISO(1,1)$ ;  $SO(1,1)$  Lorentz grubu ile  $\mathbb{R}^2$  deki ötelemelerin oluşturduğu matris grubunun semi direkt çarpımı olarak tanımlanır ve

$$ISO(1,1) = SO(1,1) \otimes T^2$$

sembolü ile gösterilir. Bu grubun tipik elemanı

$(-\infty < a_1, a_2 < \infty; -\infty < \varphi < \infty)$  olmak üzere;

$$g = g(\varphi, a_1, a_2) = g(\varphi, \bar{a}) \text{ veya}$$

$$g = \begin{pmatrix} \varphi & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Grup üzerindeki çarpım

$$g(\varphi_1, a_1)g(\varphi_2, a_2) = g(\varphi_1\varphi_2, a_1 + \varphi_1 a_2)$$

ile tanımlanır.

Bu grubun bir parametrik alt grupları;

$$g(0, t, 0) , g(0, 0, t) , g(\varphi, 0, 0) \text{ veya}$$

$$g(t_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , g(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , g(t_3) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Bu matrislere karşı gelen teğet matrisler de

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu cebirin komütasyon bağıntıları;

$$[a_1, a_2] = 0 , [a_2, a_3] = -a_1 , [a_3, a_1] = a_2$$

olarak bulunur.

$a_1$  ve  $a_2$  nin yerine daha geleneksel olan gösterimi kullandığımızda

$$P_+ = a_1 - a_2 , P_- = a_1 + a_2 , H = a_3$$

için, 1-parametrik alt grup;

$$g(0, t, -t) , g(0, t, t)$$

olur.  $iso(1,1)$  cebiri için komutasyon bağıntıları [4]

$$[P_+, H] = P_+ , \quad [P_-, H] = -P_- , \quad [P_+, P_-] = 0$$

dir.

### 2.3 Üç Boyutlu Poincaré Grup ve Cebiri: $ISO(1,2)$ ve $iso(1,2)$

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$$

kuadratik formunu invaryant bırakan dönüşümlerin oluşturduğu grup “ $O(1,2)$  Lorentz grubu” ve determinantı 1 olan matrislerin oluşturduğu grup “ $SO(1,2)$  proper Lorentz grubu” olarak adlandırılır.

Bu grubun 1-parametrik alt grupları;

$$g_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad g_{12} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad g_{13} = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & 0 & \sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \alpha & 0 & \cosh \alpha \end{bmatrix}$$

dır. Bu cebirin Lie cebiri elemanları;

$$I_{23} = g_{23}^{-1} \frac{dg_{23}}{d\psi} \Big|_{\psi=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_{12} = g_{12}^{-1} \frac{dg_{12}}{dt} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_{13} = g_{13}^{-1} \frac{dg_{13}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır ve komütasyon bağıntıları

$$[I_{12}, I_{13}] = -I_{23},$$

$$[I_{23}, I_{12}] = I_{13},$$

$$[I_{23}, I_{12}] = I_{13}$$

şeklindedir.  $R^3$  deki değişimleri sırasıyla

$$t \rightarrow (t, 0, 0) = \exp tP_1$$

ile gösterirsek,  $P_1, P_2$  ve  $P_3$ ,  $R^3$  ün bir bazı (taban) olacak ve sağladığı komütasyon bağıntıları

$$[P_1, P_2] = 0, [P_2, P_3] = 0 \text{ ve } [P_1, P_3] = 0$$

dir. Üç boyutlu Poincaré grubu;  $SO(1, 2)$  ve  $R^3$  ün semi-direkt çarpımıdır ve

$$ISO(1, 2) = SO(1, 2) \otimes R^3$$

şeklinde gösterilir. Bu grubun herhangi bir  $g \in ISO(1, 2)$  tipik elemanı

$$g = \begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formundadır öyle ki

$$A \in SO(1, 2) \text{ ve } \xi \in R^3$$

dur. Semi-direkt çarpım grubunun cebiri; semi-direkt çarpımı yapılan iki alt grubun cebirlerinin direkt toplamıdır. Buna göre  $iso(1, 2)$  cebiri;

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

için

$$[J_{23}, J_{12}] = J_{13} \quad , \quad [J_{23}, J_{13}] = -J_{12} \quad , \quad [J_{12}, J_{13}] = -J_{23}$$

$$[P_1, J_{13}] = -P_3 \quad , \quad [P_2, J_{13}] = 0 \quad , \quad [P_3, J_{13}] = -P_1$$

$$[P_1, J_{12}] = -P_2 \quad , \quad [P_2, J_{12}] = -P_1 \quad , \quad [P_3, J_{12}] = 0$$

$$[P_1, J_{23}] = 0 \quad , \quad [P_2, J_{23}] = -P_3 \quad , \quad [P_3, J_{23}] = -P_2$$

komütasyon bağıntılarını gerçekler.

## 2.4 Dört Boyutlu Poincare Grup ve Cebiri: $ISO(1,3)$ , $iso(1,3)$

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$$

kuadratik formunu invariant bırakan dönüşümlerin oluşturduğu grup  $O(1,3)$  Lorentz grubu ve determinantı 1 olan matrislerin oluşturduğu grup  $SO(1,3)$  olarak adlandırılır. Kısaca Poincaré grubu sembol olarak

$$ISO(1,3) = SO(1,3) \otimes R^4$$

ile gösterilir. Poincaré grubunu oluşturmak için  $ISO(1,3)$  grubunun 1-parametrik alt grupları;

$$g_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad g_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad g_{03} = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{02} = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g_{03} = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri  $SO(1,3)$  den gelen matrisler, diğ er taraftan  $R^4$  den gelen matrisler

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu 1-parametrik alt grupların türevlerinin parametrenin sıfırdaki değ erleri

$$J_{12} = \left. \frac{dg_{12}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{31} = \left. \frac{dg_{31}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{23} = \left. \frac{dg_{23}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{01} = \left. \frac{dg_{01}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{02} = \left. \frac{dg_{02}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{03} = \left. \frac{dg_{03}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \left. \frac{dw_0(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \left. \frac{dw_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \left. \frac{dw_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \left. \frac{dw_3(t)}{dt} \right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak:

$P$  : Ötelemeler grubunun üreteçleri

$J_{\kappa\nu}$  : Lorentz grubunun üreteçleri

$g_{\kappa\nu}$  : Minkowski uzayının metrik matrisi

olmak üzere

$$[P_\kappa, P_\nu] = 0$$

$$[J_{\kappa\nu}, P_\rho] = i(g_{\kappa\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\kappa)$$

$$[J_{\kappa\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\kappa\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\kappa\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}J_{\kappa\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\kappa\rho})$$

Komütasyon bağıntılarını sağlar. ( $\kappa, \nu = 0, 1, 2, 3$ )

## BÖLÜM 3

### SÜPERCEBİRLER

#### 3.1 Süpercebirlere

Bildiğimiz gibi  $g$  Lie cebiri bir vektör uzayıdır ve bu uzayda Jakobi koşulunu sağlayan antisimetrik bilineer form tanımlıdır. Eğer  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \dim(g)$  elemanları vektör uzayının taban elemanlarıysa  $[.,.]$  ile gösterilen bilineer form ile

$$[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^k X_k \quad (3.1)$$

Jakobi koşulunu

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_k, [X_i, X_j]] + [X_j, [X_k, X_i]] = 0 \quad (3.2)$$

sağlar. Şimdi  $X_j$  'lerin vektör uzayında operatörler olduğunu düşünelim. Bu durumda bilineer form;

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i \quad (3.3)$$

antikomütatörü ile verilir. Yukarıdaki  $X_i$  ve  $X_j$  arasındaki çarpım bilinen operatör çarpımıdır. Bu durumda Jakobi koşulunun sağlandığı gösterilebilir. Bu durumda  $X_i$  ile üretilen polinomların cebiri  $U(g)$  olmak üzere bu cebirde taban

$$X_{i_1}^{n_1} X_{i_2}^{n_2} \dots X_{i_N}^{n_N}, \quad i_r = 1, \dots, N, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots$$

ile verilir. Elde edilen  $U(g)$  'ye  $g$  Lie cebrinin "evrensel zarf cebiri" denir. Bu  $U(g)$  cebirini Hopf cebiri yapısı ile donatabiliriz.  $U(g)$  'nin Hopf cebiri yapısı;

$$\text{Eş-çarpım} : \Delta : U(g) \rightarrow U(g) \otimes U(g)$$

$$\text{Antipode} : S : U(g) \rightarrow U(g)$$

$$\text{Eş-birim} : \varepsilon : U(g) \rightarrow C$$

şeklinde verilen eş-çarpım, antipod ve eş-birim aşağıdaki formüller ile verilir:

$$\begin{aligned} \Delta(X_j) &= X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j \\ S(X_j) &= -X_j \\ \varepsilon(X_j) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Şimdi  $U(g)$  'yi üreten  $X_j$  elemanlarına

$$KQ_\alpha = -Q_\alpha K, \quad K^2 = 1 \tag{3.5}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{j=1}^{\dim(g)} b_{\alpha\beta}^j X_j \tag{3.6}$$

$$[Q_\alpha, X_j] = \sum_{\beta=1}^N a_{\alpha\beta}^j Q_\beta \tag{3.7}$$

olacak şekilde yeni  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  ve  $K$  elemanlarını ekleyelim. Böylece  $X_j$ ,  $Q_\alpha$  ve  $K$  ile üretilen cebiri  $U_2^N(g)$  ile gösterilir [3]. (3.6) ve (3.7) bağıntılarındaki  $a_{\alpha\beta}^j$  ve  $b_{\alpha\beta}^j$  elemanları keyfi değildir. Bu cebirin yani  $U_2^N(g)$  'nin birleşmeli olması için bu elemanlar üzerine bazı koşullar (Jakobi özdeşliğine benzeyen koşullar) koymalıyız.  $\{.,.\}$  antikomütatör ve  $[.,.]$  komütatör arasında bazı özdeşlikler tanımlamalıyız. Bu özdeşlikler;

$$\left[ X_i, \{Q_\alpha, Q_\beta\} \right] + \{[Q_\alpha, X_i], Q_\beta\} + \{Q_\alpha, [Q_\beta, X_i]\} = 0 \quad (3.8)$$

$$\left[ X_i, [X_j, Q_\alpha] \right] + [Q_\alpha, [X_i, X_j]] + [X_j, [Q_\alpha, X_i]] = 0 \quad (3.9)$$

ile verilir. Ayrıca verilen bu özdeşliklerin gerçekleştiği görülebilir. Yukarıdaki özdeşlikler  $a_{\alpha\beta}^j$  ve  $b_{\alpha\beta}^j$  katsayıları üzerine aşağıdaki koşulları getirir:

$$[a^i, a^j] = c_{ij}^k a^k \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\dim(g)} (b_{\alpha\beta\gamma}^k a_{\sigma\tau}^k + b_{\sigma\alpha\beta}^k a_{\gamma\tau}^k + b_{\gamma\sigma\alpha}^k a_{\beta\tau}^k + b_{\beta\gamma\sigma}^k a_{\alpha\tau}^k) = 0 \quad (3.11)$$

Aynı zamanda bu cebir üzerindeki Hopf cebiri yapısı

$$\Delta(Q_\alpha) = Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha, \quad \Delta(K) = K \otimes K \quad (3.12)$$

$$\varepsilon(Q_j) = 0, \quad \varepsilon(K) = 1 \quad (3.13)$$

$$S(Q_j) = Q_j K, \quad S(K) = K \quad (3.14)$$

ile verilir. (3.4) formüllerinin (3.1), (3.5), (3.6), (3.7) cebir yapısı ile tutarlı olduğu gösterilebilir. Böylece Hopf cebri formülasyonunda süpercebri  $U_2^N(g)$  ile gösterilir.

### 3.2 Kesirsel (Fractional) Süpercebirlere

$g$  Lie cebirinin kübik kökünü elde etmek için (3,6) daki  $S_2$  invaryant formu yerine  $S_3$  invaryant formu alınır. Sonuç olarak,

$X_j$ ,  $j=1,..,\dim(g)$ ,  $Q_\alpha$ ,  $\alpha=1,..,N$  ve  $K$  ile üretilen ve aşağıdaki bağıntıları sağlayan

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k \quad (3.15)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} = b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j \quad (3.16)$$

$$[Q_\alpha, X_j] = a_{\alpha\beta}^j Q_\beta \quad (3.17)$$

$$KQ_\alpha = qQ_\alpha K, \quad q^3 = 1, \quad K^3 = 1 \quad (3.18)$$

bir cebir tanımlanır. Bu cebire “kesirsel süpersimetrik cebir” denir ve  $U_3^N(g)$  ile gösterilir. Burada

$$Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} + Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} + Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\} = b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j$$

bağıntısı  $S_3$  invaryant formudur.

Yukarıdaki  $U_3^N(g)$  cebirinin yapısı:

$$\Delta(X_j) = X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j \quad (3.19)$$

$$\Delta(Q_\alpha) = Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha, \quad \Delta(K) = K \otimes K \quad (3.20)$$

$$\varepsilon(X_j) = 0, \quad \varepsilon(Q_j) = 0, \quad \varepsilon(K) = 1 \quad (3.21)$$

$$S(X_j) = -X_j, \quad S(Q_j) = -K^2 Q_j, \quad S(K) = K^2$$

formülleri ile verilen antipod ve eş-cebir yapısı ile uyumludur.

### 3.3 Kesirsel (Fractional) Süper Jakobi Özdeşlikleri

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \quad (3.22)$$

$$[A, \{B, C, D\}] + \{[B, A], C, D\} + \{B, [C, A], D\} + \{B, C, [D, A]\} = 0 \quad (3.23)$$

ve

$$[A, \{B, C, D\}] + [B, \{A, C, D\}] + [C, \{B, A, D\}] + [D, \{B, C, A\}] = 0 \quad (3.24)$$

özdeşliklerinin gerçekten sağlandığını göstermek gerekir. Bunun için de önce (3.22) ile verilen Jakobi özdeşliğinin gerçekleştiğini gösterelim:

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

Burada sadece bir parçayı açık olarak hesaplamamız yeterli olur. Çünkü diğer iki ifade de aynı şekilde hesaplanır. Birinci ifadeyi alalım:

$$[A, [B, C]] = [A, BC - CB]$$

$$= [A, BC] - [A, CB]$$

$$= [A, B]C - B[C, A] - ([A, C]B - C[B, A])$$

$$= (AB - BA)C - B(CA - AC) - ((AC - CA)B - C(BA - AB))$$

$$= ABC - BCA - ACB + CBA$$

benzer şekilde ikinci ifade;

$$[C, [A, B]] = CAB - ABC - CBA + BAC$$

ve üçüncü ifade de;

$$[B, [C, A]] = BCA - CAB - BAC + ACB$$

olarak bulunur. Bulduğumuz bu üç özdeşlikte, yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] &= ABC - BCA - ACB + CBA + CAB - ABC - \\ &\quad - CBA + BAC + BCA - CAB - BAC + ACB \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.22) özdeşliği gerçekleşmiş olur.

(3.23) özdeşliğini gösterelim:

$$[A, \{B, C, D\}] + \{[B, A], C, D\} + \{B, [C, A], D\} + \{B, C, [D, A]\} = 0$$

özdeşliğindeki ifadeyi alalım. (3.21) bağıntısını kullanarak

$$[A, \{B, C, D\}] = [A, B\{C, D\} + C\{B, D\} + D\{B, C\}]$$

elde edilir ve komütatör bağıntısının lineerlik özelliğinden;

$$\begin{aligned} [A, B\{C, D\}] + [A, C\{B, D\}] + [A, D\{B, C\}] &= [A, B]\{C, D\} - B[\{C, D\}, A] + \\ &+ [A, C]\{B, D\} - C[\{B, D\}, A] + [A, D]\{B, C\} - D[\{B, C\}, A] \end{aligned}$$

ve benzer şekilde ikinci ifade;

$$\{[B, A], C, D\} = [B, A]\{C, D\} + C\{[B, A], D\} + D\{[B, A], C\}$$

ve üçüncü ifade;

$$\{B, [C, A], D\} = B\{[C, A], D\} + [C, A]\{B, D\} + D\{B, [C, A]\}$$

ve dördüncü ifade de;

$$\{B, C, [D, A]\} = B\{C, [D, A]\} + C\{B, [D, A]\} + [D, A]\{B, C\}$$

bulunur. Elde edilen sonuçlar yerine yazılır, komütatör ve antikomütatör bağıntıları kullanılırsa;

$$\begin{aligned} &[A, \{B, C, D\}] + \{[B, A], C, D\} + \{B, [C, A], D\} + \{B, C, [D, A]\} = \\ &= ABCD - BCDA + ABDC - BDCA + ACBD - CBDA + ACDB - CDBA + \\ &+ ADBC - DBCA + ADCB - DCBA + BACD - BADC - ABCD - ABDC + \\ &+ CBAD - CABD + CDBA - CDAB + DBAC - DABC + DCBA - DCAB + \\ &+ BCAD - BACD + BDCA - BDAC + CABD + CADB - ACBD - ACDB + \\ &+ DBCA - DBAC + DCAB - DACB + BCDA - BCAD + BDAC - BADC + \\ &+ CBDA - CBAD + CDAB - CADB + DABC + DACB - ADBC - ADCB \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Kesirsel süper jakobi özdeşliği sağlanmış olur.

(3.24) özdeşliğinin sağlandığını gösterelim;

$$[A, \{B, C, D\}] + [B, \{A, C, D\}] + [C, \{B, A, D\}] + [D, \{B, C, A\}] = 0$$

özdeşliğinin ilk ifadesini alalım ve sırasıyla (3.21) bağıntısı ve lineerlik özelliğinden faydalanarak;

$$\begin{aligned} [A, \{B, C, D\}] &= [A, B\{C, D\} + C\{B, D\} + D\{B, C\}] \\ &= [A, B\{C, D\}] + [A, C\{B, D\}] + [A, D\{B, C\}] \\ &= [A, B]\{C, D\} - B[\{C, D\}, A] + [A, C]\{B, D\} - C[\{B, D\}, A] + [A, D]\{B, C\} - D[\{B, C\}, A] \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde ikinci ifade;

$$\begin{aligned} [B, \{A, C, D\}] &= \\ &= [B, A]\{C, D\} - A[\{C, D\}, B] + [B, C]\{A, D\} - C[\{A, D\}, B] + [B, D]\{A, C\} - D[\{A, C\}, B] \end{aligned}$$

üçüncü ifade;

$$\begin{aligned} [C, \{B, A, D\}] &= \\ &= [C, B]\{A, D\} - B[\{A, D\}, C] + [C, A]\{B, D\} - A[\{B, D\}, C] + [C, D]\{B, A\} - D[\{B, A\}, C] \end{aligned}$$

ve dördüncü ifade de;

$$\begin{aligned} [D, \{B, C, A\}] &= \\ &= [D, B]\{C, A\} - B[\{C, A\}, D] + [D, C]\{B, A\} - C[\{B, A\}, D] + [D, A]\{B, C\} - A[\{B, C\}, D] \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu sonuçlar özdeşlikte yerine yazıldığında özdeşliğin sağlandığı görülür. Şimdi (3.22) özdeşliğinde

$$A = X_i, \quad B = X_j, \quad C = Q_\alpha \quad (3.25)$$

değerleri yerine yazıldığında

$$[X_i, [X_j, Q_\alpha]] + [Q_\alpha, [X_i, X_j]] + [X_j, [Q_\alpha, X_i]] = 0$$

olur. (3.15) ve (3.17) bağıntılarını kullanarak;

$$[X_i, -a_{\alpha\gamma}^j Q_\gamma] + [Q_\alpha, c_{ij}^k X_k] + [X_j, a_{\alpha\gamma}^i Q_\gamma] = 0$$

$$-a_{\alpha\gamma}^j [X_i, Q_\gamma] + c_{ij}^k [Q_\alpha, X_k] + a_{\alpha\gamma}^i [X_j, Q_\gamma] = 0$$

ve yine (3.15) komütatörün antisimetrik özelliğinden

$$-a_{\alpha\gamma}^j (-a_{\gamma\beta}^i Q_\beta) + c_{ij}^k (a_{\alpha\beta}^k Q_\beta) + a_{\alpha\gamma}^i (-a_{\gamma\beta}^j Q_\beta) = 0$$

$$(a_{\alpha\gamma}^i a_{\gamma\beta}^j - a_{\alpha\gamma}^j a_{\gamma\beta}^i) Q_\beta = (c_{ij}^k a_{\alpha\beta}^k) Q_\beta$$

ve toplamı  $\gamma = \sigma$  üzerinden alırsak;

$$\sum_{\sigma=1}^N (a_{\alpha\sigma}^i a_{\sigma\beta}^j - a_{\alpha\sigma}^j a_{\sigma\beta}^i) = \sum_{k=1}^{\dim(g)} c_{ij}^k a_{\alpha\beta}^k \quad (3.26)$$

elde ederiz. Bu bağıntıyı (3.15) ile karşılaştırdığımızda  $a^j \equiv (a_{\alpha\beta}^j)_{\alpha,\beta=1}^N$   $N \times N$  lik matrisleri ile verilen Lie cebirinin  $N$ -boyutlu temsilini tanımlar.

(3.23) özdeşliğinde

$$A = X_k, \quad B = Q_\alpha, \quad C = Q_\beta, \quad D = Q_\gamma \quad (3.27)$$

değerleri yerine yazıldığında

$$[X_k, \{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\}] + \{[Q_\alpha, X_k], Q_\beta, Q_\gamma\} + \{Q_\alpha, [Q_\beta, X_k], Q_\gamma\} + \{Q_\alpha, Q_\beta, [Q_\gamma, X_k]\} = 0$$

(3.21) ve (3.17) bağıntıları ile komütatör özelliğinden faydalanarak

$$\left[ X_k, b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j \right] + \left\{ a_{\alpha\sigma}^k Q_\sigma, Q_\beta, Q_\gamma \right\} + \left\{ Q_\alpha, a_{\beta\sigma}^k Q_\sigma, Q_\gamma \right\} + \left\{ Q_\alpha, Q_\beta, a_{\gamma\sigma}^k Q_\sigma \right\} = 0$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}^j c_{kj}^i X_i + a_{\alpha\sigma}^k b_{\sigma\beta\gamma}^j X_j + a_{\beta\sigma}^k b_{\alpha\sigma\gamma}^j X_j + a_{\gamma\sigma}^k b_{\alpha\beta\sigma}^j X_j = 0$$

gerekli düzenlemeyi yaparsak

$$\sum_{\sigma=1}^N \left( a_{\alpha\sigma}^k b_{\sigma\beta\gamma}^i + a_{\beta\sigma}^k b_{\sigma\alpha\gamma}^i + a_{\gamma\sigma}^k b_{\sigma\beta\alpha}^i \right) = \sum_{j=1}^{\dim(g)} c_{jk}^i b_{\alpha\beta\gamma}^j \quad (3.28)$$

bağıntısı bulunur.

(3.24) özdeşliğinde

$$A = Q_\sigma, \quad B = Q_\alpha, \quad C = Q_\beta, \quad D = Q_\gamma \quad (3.29)$$

değerleri yerine yazıldığında

$$\left[ Q_\sigma, \{ Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma \} \right] + \left[ Q_\alpha, \{ Q_\sigma, Q_\beta, Q_\gamma \} \right] + \left[ Q_\beta, \{ Q_\alpha, Q_\sigma, Q_\gamma \} \right] + \left[ Q_\gamma, \{ Q_\alpha, Q_\beta, Q_\sigma \} \right] = 0$$

yukarıdaki özdeşlikte (3.16) bağıntısını kullanarak

$$\left[ Q_\sigma, b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j \right] + \left[ Q_\alpha, b_{\sigma\beta\gamma}^j X_j \right] + \left[ Q_\beta, b_{\alpha\sigma\gamma}^j X_j \right] + \left[ Q_\gamma, b_{\alpha\beta\sigma}^j X_j \right] = 0$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}^j \left[ Q_\sigma, X_j \right] + b_{\sigma\beta\gamma}^j \left[ Q_\alpha, X_j \right] + b_{\alpha\sigma\gamma}^j \left[ Q_\beta, X_j \right] + b_{\alpha\beta\sigma}^j \left[ Q_\gamma, X_j \right] = 0$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}^j a_{\sigma\tau}^j Q_\tau + b_{\sigma\beta\gamma}^j a_{\alpha\tau}^j Q_\tau + b_{\alpha\sigma\gamma}^j a_{\beta\tau}^j Q_\tau + b_{\alpha\beta\sigma}^j a_{\gamma\tau}^j Q_\tau = 0$$

yukarıdaki bağıntıyı düzenlersek

$$\sum_{k=1}^{\dim(g)} \left( b_{\alpha\beta\gamma}^k a_{\sigma\tau}^k + b_{\sigma\alpha\beta}^k a_{\gamma\tau}^k + b_{\gamma\sigma\alpha}^k a_{\beta\tau}^k + b_{\beta\gamma\sigma}^k a_{\alpha\tau}^k \right) = 0 \quad (3.30)$$

bağıntısını elde ederiz.

### 3.4 $U_3^2(iso(1,1))$ Cebiri

$iso(1,1)$  cebirinin üreteçleri için kullanılan geleneksel gösterim yerine

$$P_+ = X_1, \quad P_- = X_2 \quad \text{ve} \quad H = X_3$$

gösterimini kullanarak bu cebirin komütasyon bağıntıları

$$[X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = -X_2, \quad [X_1, X_2] = 0$$

ile verilir [5].

Bu cebirin sıfırdan farklı yapı sabitleri  $c_{13}^1 = 1$  ve  $c_{23}^2 = -1$  dir. (3.26) bağıntısına göre verilen  $N$  için  $a^j = \{a_{\alpha\beta}^j\}$  matrisi  $iso(1,1)$  'in keyfi  $N$  – boyutlu temsili olmak üzere bu temsil tarafından simetrik  $b_{\alpha\beta\gamma}^j$  yapı sabitleri (3.28) ve (3.30) denklemlerinin çözümleri bu temsil ile tamamen belirlenir. Burada  $n=3$  'te ( $q^3=1$ ) ve  $N=2$  için  $iso(1,1)$ 'in kesirsel (fractional) süper genellemesi için matris temsilleri

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$a_{13}^1 = 1, \quad a_{23}^1 = -1, \quad a_{13}^2 = 1, \quad a_{23}^2 = 1, \quad a_{12}^3 = 1, \quad a_{21}^3 = 1$$

değerlerini (3.30) denkleminde yerine koyduğumuzda ve (3.28) denklemini de kullanarak

$$b_{111}^1 = -b_{111}^2 = 3b_{112}^1 = 3b_{112}^2$$

$$b_{222}^1 = b_{222}^2 = 3b_{122}^1 = -3b_{122}^2$$

$$b_{112}^1 = -b_{112}^2$$

$$b_{112}^2 = b_{122}^2$$

bulunur. Diğer bütün  $b_{\alpha\beta\gamma}^j$  ler sıfırdır.

Yukarıdaki eşitlikleri düzenleyerek

$b_{111}^2 = 1$  ve  $b_{222}^1 = 1$  seçtiğimizde diğer bütün  $b_{\alpha\beta\gamma}^j$  sıfır iken

$$b_{111}^1 = 3b_{112}^1 = 3b_{112}^2 = -b_{111}^2$$

$$b_{222}^1 = b_{222}^2 = 3b_{122}^1 = -3b_{122}^2$$

$$b_{112}^1 = -b_{122}^1$$

$$b_{112}^2 = b_{122}^2$$

dır. Diğer bütün bağıntılar sıfır olmak üzere

$$[Q_1, X_1] = 0 \quad , \quad [Q_2, X_1] = 0 \quad , \quad [Q_1, X_3] = Q_2$$

$$[Q_1, X_2] = 0 \quad , \quad [Q_2, X_2] = 0 \quad , \quad [Q_2, X_3] = Q_1$$

$$\{Q_1, Q_1, Q_1\} = -X_1 + X_2 \quad , \quad \{Q_1, Q_1, Q_2\} = -\frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2$$

$$\{Q_2, Q_2, Q_2\} = X_1 + X_2 \quad , \quad \{Q_1, Q_2, Q_2\} = \frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2$$

Fractional (kesirsel) süpercebiri elde ederiz.

## BÖLÜM 4

---

### SONUÇ VE ÖNERİLER

[3] makalesindeki cebirsel yaklaşımı kullanarak elde ettiğimiz iki boyutlu kesirsel süpersimetrik Poincaré cebirinin, farklı yöntemlerle elde edilen [7], [8] makaleleri ile tutarlı olduğunu gördük. Elde edilen  $U_3^2(iso(1,1))$  cebirine karşılık gelen kesirsel (Fractional) süpersimetrik Poincaré grubu açık bir problemidir.

## KAYNAKLAR

---

- [1] Rausch de Traunbenberg, M. ve Slupinski, M.J.,(2000),“Fractional Supersymmetry and Lie Algebras” , J.Math.Phys., 41: 4556
- [2] Rausch de Traunbenberg, M.,(2000). “Fractional Supersymmetry and Lie Algebras”, J.Math.Phys., Preprint arXiv.hep-th/0007150.
- [3] Ahmedov, H., Yıldız, A. ve Uçan Y., (2001). “Fractional Super Lie Algebras and Groups”, J.Phys., A.34: 6413-6424
- [4] Ahmedov, H., and Dayı, O.F., (2000). “Non-abelian Fractional Supersymmetry in Two Dimensions”, Mod.Phys., Lett.A., 15: 1801-1812, math.qa/9905164.
- [5] Ahmedov, H., Dayı, O.F., (1999). “Two Dimensional Fractional Supersymmetry From the Quantum Poincaré Group at Roots of Unity”, J.Phys., .32: 6247-6253, math.qa/9903093.
- [6] Mohammedi, N., Moultağa G.ve Rausch de Traunbenberg, M., “Field Theoretic Realizations for Cubic Supersymmetry”, Int.J.Math.Phys., A.to appear; hep-th/0305172.
- [7] Rausch de Traunbenberg, M., (2004). “Four Dimensional Cubic Supersymmetry”, Proceedings of Inst.of Math of NAS of Ukraine, 50(2): 578-583.
- [8] Gaze, Rausch de Traunbenberg, M. ve Tanasa, (2007). “Poincaré and  $sl(2)$  Algebras of Order 3”, J.Math.Phys., 48: 1-24.
- [9] N.Ja.Vilenkin ve A.V.Klimyk, (1991). Simplest Lie Groups, Special Functions and Integral Forms.,Volume 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [10] De Witt, B., (1984). “Supermanifolds”, Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Kostant, (1977). “Graded Manifolds, Graded Lie Theory and Prequantization”, Lecture Notes in Mathematics, Vol.570, Springer, 177, Berlin.

**A-1 Lie Grubu**

$G$  boş kümeden farklı bir küme olsun. Eğer

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow x \cdot y$$

$\cdot$  işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $(G, \cdot)$  ikilisine bir “grup” denir.

i.  $\forall x, y, z \in G$  için  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

ii.  $\forall x \in G$  için  $e \cdot x = x \cdot e$  olacak şekilde  $G$  de bir tek  $e$  birim elemanı vardır.

iii.  $\forall x \in G$  için  $x \cdot x' = x' \cdot x$  olacak şekilde  $G$  de bir tek  $x'$  inversi vardır.

$(G, \cdot)$  bir grup olsun.  $G$  grubu “.” işlemine göre değişmeli ise, yani  $\forall x, y \in G$  için  $x \cdot y = y \cdot x$  sağlanıyorsa  $G$  ye “değişmeli grup” denir.

Bir  $M$  diferansiyellenebilir manifoldu ve bir  $G$  grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa  $(M, G)$  ikilisine bir “Lie Grubu” denir.

$M$  nin noktaları  $G$  nin elemanları ile çakışır.

$$\alpha_G : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1} \quad \text{dönüşümü diferansiyellenebilirdir.}$$

## A-2 Lie Cebiri

$V$  bir  $K$  cismi üzerinde vektör uzayı olsun.  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$  dönüşümü de

i. Bilineer

ii.  $\forall x, y \in V$  için  $[x, y] = -[y, x]$

iii.  $\forall x, y, z \in V$  için  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  Jakobi Özdeşliği

özelliklerini sağlıyorsa  $V$  ye “Lie cebiri” denir.

## A-3 Evrensel Zarf Cebiri

$\mathfrak{g}$  Lie cebrinin evrensel zarf cebri,  $U(\mathfrak{g})$  birimli bir cebir olduğunda

$$e: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$$

Bir dönüşümdür; öyle ki

1)  $e$  bir  $\mathfrak{g}$  cebri homomorfizmasıdır. Yani; lineerdir ve

$$e[x, y] = e(x)e(y) - e(y)e(x)$$

dir.

2) Eğer  $A$  herhangi bir birimli birleşmeli cebir ve  $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow A$  herhangi bir Lie cebiri homomorfizması ise, birleşmeli cebirin tek  $\phi$  homomorfizması vardır öyle ki

$$\alpha = \phi \circ e$$

dır.

Açıktır ki, eğer  $U(\mathfrak{g})$  varsa tektir. Böylece,  $\mathfrak{g}$  ‘nin evrensel cebrinden bahsedebiliriz.

Bunu evrensel zarf cebri olarak adlandırırız.  $U(\mathfrak{g})$  şeklinde gösteririz.

#### A-4 1-Parametrik Alt Grup

$(G, *)$  bir grup olsun.

$f : (R, +) \rightarrow (G, *)$  dönüşümü  $\forall t_1, t_2 \in R$  için,

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) * f(t_2)$$

ise  $f(R)$  'ye  $G$  'nin "1-parametrelili alt grubu" denir. (Saatinger and Weaver, 1993.)

$G$  Lie grubu üzerinde bir  $g = g(\tau) (a \leq \tau \leq b)$  eğrisi,

i.  $g(0) = e$

ii.  $g(\tau_1 + \tau_2) = g(\tau_1)g(\tau_2)$

iii.  $g(-\tau) = g(\tau)^{-1}$

koşullarını sağlarsa bu eğriye  $G$  Lie grubunun "1-parametrelili alt grubu" denir. (Avramidi, 2000.)

#### A-5 Hopf Cebiri

$A(G)$ ,  $G$  Lie grubu üzerindeki fonksiyonların kümesi olsun.  $A(G)$  'de  $m$  çarpımı;

$$m(f_1(g), f_2(g)) = f_1(g) f_2(g)$$

1 birimi;

$$1(g) \equiv 1$$

formülleri ile tanımlanır. Bu çarpım birleşime (assosiyativ) ve değişime (komutatif) özelliklerine sahiptir. Eğer  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonları sürekli ise  $f_1 f_2$  de sürekli dir. Böylece  $A(G)$  cebiri,  $G$  Lie grubu üzerindeki sürekli fonksiyonların 1 birimli birleşmeli cebiridir.

$G$  'nin grup yapısı bizi  $A(G)$  üzerindeki diğer işlemlere götürür. Bunlar;

$$\text{Eş-çarpım} : \Delta : A(G) \rightarrow A(G \times G)$$

$$\text{Eş-birim} : \varepsilon : A(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{Antipode} : S : A(G) \rightarrow A(G)$$

$$\forall g_1, g_2 \in G \text{ için } (\Delta f)(g_1 g_2) = f(g_1 g_2)$$

$$e \in G \text{ olmak üzere } \varepsilon f(g) = f(e)$$

$$\text{ve } \forall g \in G \text{ için } S f(g) = f(g^{-1})$$

formülleri ile hesaplanır.

$A(G)$  üzerindeki çarpım ve eş-çarpım tensör çarpımı anlamındadır. Yani, eğer  $A(G)$  ,  $G$  üzerindeki polinomların cebiri ise  $A(G \otimes G) = A(G) \otimes A(G)$  dir.

$A(G) \otimes A(G)$  'nin elemanları  $\sum_i f_i(g) \otimes f_i'(g)$  sonlu lineer birleşimidir.

$m : A(G) \otimes A(G)$  'de çarpım;

$$(f_1 \otimes f_2)(f_1' \otimes f_2') = f_1 f_1' \otimes f_2 f_2' \text{ ve } 1 \otimes 1 \text{ ile birim elemanı tanımlanır. Bu durumda}$$

$A(G)$  üzerindeki  $m$  çarpımı;  $A(G) \otimes A(G)$  'den  $A(G)$  'ye bir homomorfizmadır.

$$m\left[\sum_i f_i(g) \otimes f_i'(g)\right] = \sum_i f_i(g) \otimes f_i'(g)$$

$$\Delta : A(G) \rightarrow A(G) \otimes A(G)$$

$$\Delta(f(g)) = \sum_i f_i(g) \otimes f_i'(g)$$

Kolayca gösterilebilir ki,  $\Delta$  ,  $\varepsilon$  ,  $S$  ;  $A(G)$  cebirinin homomorfizmalarıdır. Grup özellikleri  $\Delta$  ,  $\varepsilon$  ve  $S$  homomorfizmalarının bazı özelliklerine götürür. Kısacası;  $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$  grup işlemlerinin assosiyetifliği;  $f[(g_1 g_2) g_3] = f[g_1 (g_2 g_3)]$  sağlar. Bu bağıntının sol kenarı eş-çarpım ile,

$$f[(g_1 g_2) g_3] = ((\Delta \otimes id) \circ \Delta f)(g_1 g_2 g_3)$$

ve sağ kenarı da

$$f[(g_1 g_2) g_3] = ((id \otimes \Delta) \circ \Delta f)(g_1 g_2 g_3)$$

formunda temsil edilir.

Burada  $id : A(G) \rightarrow A(G)$  birim eşlemedir. Böylece eş-çarpım,

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

eşitliğini sağlar. Her  $g \in G$  için  $eg = ge = g$  olduğundan

$$f(eg) = f(ge) = f(g)$$

dir. Bu özellik ko-birimin aşağıdaki özelliğini sağlar.

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id$$

her  $g \in G$  için  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$  dir.

$$f(gg^{-1}) = f(g^{-1}g) = f(e) \text{ 'den,}$$

$$[(S \otimes id) \circ \Delta f](g_1 g_2) = f(g_1^{-1} g_2) \text{ 'den,}$$

$$m \circ [((S \otimes id) \circ \Delta f)(g_1 g_2)] = f(e)$$

aynı şekilde

$$m \circ [((id \otimes S) \circ \Delta f)(g_1 g_2)] = f(e)$$

$$f(c) = \varepsilon(f)1 \text{ olduğundan,}$$

$$m \circ [(S \otimes id) \circ \Delta] = m \circ [(id \otimes S) \circ \Delta] = 1\varepsilon$$

$A(G)$  cebiri yukarıdaki özellikleri sağlıyorsa bu bir Hopf cebiridir. Eğer,  $G$  komütatif (değişmeli) değilse,  $A(G)$  de komütatif olmayan Hopf cebiridir. Kaba bir şekilde söylenebilir ki, herhangi bir Hopf cebiri grup manifoldu üzerindeki smooth fonksiyonların cebirine izomorftur.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Özge HIDIRLAR  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 27.07.1987  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** : ozgehidirlar@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU

| Derece    | Alan           | Okul/Üniversite                 | Mezuniyet Yılı |
|-----------|----------------|---------------------------------|----------------|
| Y. Lisans | Matematik Müh. | Yıldız Teknik Üniversitesi      | -              |
| Lisans    | Matematik      | Sakarya Üniversitesi            | 2010           |
| Lise      | Fen Bilimleri  | Halide Edip Adıvar Lisesi (YDA) | 2005           |

### İŞ TECRÜBESİ

| Yıl             | Firma/Kurum             | Görevi           |
|-----------------|-------------------------|------------------|
| 2014 Ocak-Halen | Türkiye İş Bankası A.ş. | Memur            |
| 2010-2014 Ocak  | Akdemir Muhasebe        | Muhasebe Elemanı |